N° D'ENREGISTREMENT
AU C.N.R.S. : A.O. 4550

Article principal

recouvrant en partie

MATHÉMATIQUES

LA THÈSE DE DOCTEUR - INGÉNIEUR

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

Alain BOLLAERT

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR - INGÉNIEUR

SUJET DE LA THÈSE :

Calcul des poutres en T en béton armé - flexion simple

soutenue le 19 Juin 1970 devant la Commission d'Examen

MM. SIESTRUNCK, *Président*

ALAIS, BLEVOT } *Examinateurs*

THÈSES

présentées à

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

par Alain BOLLAERT

≋≋≋

SUJET DE LA PREMIÈRE THÈSE :

Calcul des poutres en T en béton armé - flexion simple

SUJET DE LA DEUXIÈME THÈSE (propositions données par la Faculté) :

L'influence humaine sur les conditions atmosphériques

≋≋≋

Soutenues avec succès le 19 Juin 1970 devant la Commission, composée de :

MM. SIESTRUNCK, *Président*

ALAIS, BLEVOT } *Examinateurs*

qui a déclaré **M. Alain BOLLAERT**
digne du titre de **" Docteur-Ingénieur "** avec la mention **" très honorable ".**

Vu et permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Robert MALLET.

Vu et approuvé
Paris, le 17 Juillet 1970
Le Doyen de la Faculté des Sciences de Paris,
Marc ZAMANSKY.

Calcul des poutres en T en béton armé

Flexion simple

par

A. BOLLAERT

Ingénieur E.C.P.

Extrait de

CONSTRUCTION

T. XXII, N° 11 (Novembre 1967)

92, Rue Bonaparte **DUNOD** PARIS (VI^e^)

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Calcul des poutres en T en béton armé

Flexion simple

A. BOLLAERT, Ingénieur E.C.P.

PRÉFACE

Le travail essentiel de l'Ingénieur est de bien déterminer les données du problème qu'il doit résoudre.

Celles-ci comportent toutes les caractéristiques du milieu, toutes les données mécaniques et physico-chimiques ainsi que la définition correcte du but à atteindre.

Ce domaine est rarement connu avec la précision nécessaire. Dans la plupart des cas, sa recherche approfondie est la tâche longue et délicate de l'Ingénieur.

La réflexion, après cette étude, lui fait concevoir la solution du problème d'après les règles et les méthodes connues, et avec les moyens dont on dispose à chaque époque. La solution définitive détermine une structure capable de toutes les sollicitations et voisine de l'optimum économique. Le travail utile de l'Ingénieur est ainsi avant tout travail de conception et de réflexion, et par ailleurs il faut lui donner des moyens rapides pour obtenir immédiatement des structures correctes afin de lui laisser le temps nécessaire pour approfondir la conception.

Le mérite de M. Bollaert est de présenter les variations de résistance des poutres en T en béton armé afin de permettre la définition rapide de la structure à partir de la conception.

A. CAQUOT.

1) Introduction

La poutre en T est la forme d'ouvrage la mieux adaptée au matériau qu'est le béton armé; à résistance égale, elle conduit à un minimum de poids mort. Aussi est-elle largement utilisée dans les ossatures de bâtiment, dans les planchers industriels et dans les ponts. De plus, elle se prête aisément à la préfabrication car, mise en place avec une table de compression réduite, elle permet l'accrochage du coffrage du hourdis qui, coulé en place, participera ultérieurement à la résistance de l'ouvrage. La poutre en T, avec la poutre rectangulaire et la dalle reposant sur ses quatre côtés, constituent donc les trois éléments de base de la conception d'un ouvrage en béton armé.

Aussi est-on surpris de voir qu'à côté des raffinements de la technique sur des formes plus élaborées comme les arcs et les coques, la simple poutre en T n'ait pas fait l'objet d'une étude complète. Les principes du calcul ont été établis depuis longtemps, ils ont été officiellement publiés par la Circulaire Ministérielle du 19-7-1934, mais ils n'ont donné lieu jusqu'ici qu'à des développements très partiels concernant uniquement la détermination des sections. Pour la vérification des contraintes, aucune méthode pratique de calcul n'a été publiée.

Il convenait donc de faire une théorie exhaustive de la poutre en T, qui conduise à des méthodes de calcul simples pour les différents problèmes qui se présentent au projeteur, à savoir la détermination du coffrage et des armatures ainsi que la vérification des contraintes. Il ne faut pas oublier la détermination et la vérification des armatures comprimées, car si leur emploi systématique est à proscrire, leur utilisation est néanmoins nécessaire dans le cas d'une diminution locale de la table de compression, comme par exemple les trémies dans un plancher industriel.

2) Equations de base

Les contraintes normales σ'_a et σ_b sont données en fonction du moment M par les équations suivantes de la résistance des matériaux :

(1) $$\frac{n\,\sigma_b}{\sigma'_a} = \frac{x}{h-x}$$

(2) $$b_o\,x^2 + (b - b_o)\,h_o\,(2\,x - h_o) - 2\,n\,A'\,(h - x) = 0$$

(3) $$z = \frac{M}{A'\,\sigma'_a} = h - \frac{h_o}{2} + \frac{(b - b_o)\,h_o^3 - b_o\,x^2\,(2\,x - 3\,h_o)}{6\,[(b - b_o)\,h_o\,(2\,x - h_o) + b_o\,x^2]}$$

Le cisaillement du béton dans l'âme est :

(4) $$\tau_b = \frac{T}{b_o z}$$

Le cisaillement du béton dans la table est :

(5) $$\tau_b = \frac{T}{I}\,\frac{(b - b_o)x}{2} = T \times \frac{\sigma_b}{M} \times \frac{b - b_o}{2}$$

La contrainte de traction des étriers verticaux est :

(6) $$\sigma'_{av} = \frac{Tt}{z\,A'_v}$$

Quand il y a des armatures comprimées, les équations (2) et (3) sont remplacées par les équations suivantes :

(2') $$b_o\,x^2 + (b - b_o)\,h_o\,(2\,x - h_o) + 2\,n\,A\,(x - d) - 2\,n\,A'\,(h - x) = 0$$

(3') $$\frac{M}{\sigma'_a} = \frac{1}{n\,(h - x)}\left[\frac{b\,x^3}{3} - \frac{(b - b_o)\,(x - h_o)^3}{3} + n\,A\,(x - d)^2 + n\,A'\,(h - x)^2\right]$$

auxquelles il faut ajouter :

(7) $$\frac{\sigma_a}{n\,\sigma_b} = \frac{x - d}{x}$$

Et voici toutes les données du calcul de la poutre en T. Ces neuf équations ne sont pas compliquées, mais leurs combinaisons mènent à des développements fastidieux qui ont peut-être effrayé le calculateur.

Parmi ces combinaisons, il faut en citer une de grande importance. Si on pose :

$$\frac{x}{h} = \alpha \qquad \frac{h_o}{h} = \varepsilon \qquad \frac{b_o}{b} = \beta$$

les équations (1), (2) et (3) deviennent :

(1) $$\sigma_b = \frac{\alpha}{1 - \alpha}\,\frac{\sigma'_a}{n}$$

(2) $$A' = \frac{(1 - \beta)\,\varepsilon\,(2\,\alpha - \varepsilon) + \beta\,\alpha^2}{2\,(1 - \alpha)}$$

(3) $$M = \left\{1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(1 - \beta)\,\varepsilon^3 - \beta\,\alpha^2\,(2\,\alpha - 3\,\varepsilon)}{6\,[(1 - \beta)\,\varepsilon\,(2\,\alpha - \varepsilon) + \beta\,\alpha^2]}\right\} \times A'\,h\,\sigma'_a$$

et l'élimination de A' entre les formules (2) et (3) donne :

(8) $$M = \frac{(1 - \beta)\,\varepsilon\,(6\,\alpha - 3\,\varepsilon - 3\,\varepsilon\alpha + 2\,\varepsilon^2) + \beta\alpha^2\,(3 - \alpha)}{6\,(1 - \alpha)} \times \frac{\sigma'_a\,bh^2}{n}$$

On a ainsi les variables σ'_a, σ_b, M,A' exprimées en fonction du paramètre $\alpha = \frac{x}{h}$, mais on aurait pu aussi bien les exprimer en fonction de $k' = \frac{\sigma'_a}{\sigma_b}$ puisque ces deux paramètres sont liés par l'équation (1) :

(1) $$k' = \frac{n\,(1 - \alpha)}{\alpha}$$

3) Principe de l'étude

Maintenant, que faire de ces équations ? Bien sûr, étudier les variations relatives des différentes variables :

- σ'_a et σ_b en fonction de M et A';
- τ_b en fonction de T et A';
- σ'_{av} en fonction de T, t, A' et A'_v;

b, b_o, h, h_o étant des paramètres indépendants et x étant un paramètre lié aux hypothèses.

Mais il faut se garder de faire de l'algèbre abstrait et de faire varier les paramètres de $-\infty$ à $+\infty$. Notre calcul n'a pour but que l'étude d'une poutre et il faut éliminer tous les segments de courbes algébriques n'ayant pas de réalité physique.

Le plus simple est de considérer le paramètre x. Son intervalle de variation utile est faible et nous considérerons *a priori* :

$$h_o \leqslant x \leqslant 0{,}6\ h$$

La limite inférieure est évidente; si $x < h_o$, l'axe neutre tombe dans la table de compression, les équations (2) et (3) ne sont plus valables et la poutre doit être calculée comme une poutre rectangulaire.

Nous avons choisi la limite supérieure $x = 0{,}6\ h$, car elle correspond à $\sigma_b = \frac{3}{2}\,\frac{\sigma'_a}{n}$ qui nous semble un maximum raisonnable. Mais, par ailleurs, dans une poutre il y a toujours des armatures comprimées, ne serait-ce que les armatures de montage et si on considère le rapport σ_a/σ'_a, il nous paraît raisonnable que ce rapport soit toujours inférieur à 1. Les équations (1) et (7) donnent :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma'_a} = \frac{x - d}{h - x}$$

ce qui conduit à la condition :

$$x < \frac{h + d}{2}$$

Comme on a toujours $d < 0{,}2\ h$, cela nous donne :

$$x < \frac{h + d}{2} < 0{,}6\ h$$

Aussi, avons-nous considéré pour les poutres sans armatures comprimées l'intervalle $h_o \leqslant x \leqslant 0{,}6\ h$ et pour les poutres à armatures comprimées l'intervalle :

$$h_o \leqslant x \leqslant \frac{h + d}{2}$$

Dans cet intervalle, nous avons étudié les courbes de variation des inconnues en fonction des différents paramètres. Mais certaines de ces courbes ayant des équations difficiles à manipuler, nous avons cherché des expressions approchées simples, par exemple des équations linéaires, telles que l'approximation se fasse toujours dans le sens de la sécurité et que l'erreur due à cette substitution s'annule au milieu de l'intervalle.

A titre d'exemple, si la sécurité se situe du côté de la convexité de la courbe théorique, on remplace celle-ci par sa tangente au point médian de l'intervalle. Si la sécurité se situe du côté de la concavité de la courbe théorique, on remplace celle-ci par les deux cordes joignant le point médian de l'intervalle aux deux extrémités du segment de courbe. L'approximation faite en remplaçant un segment de courbe par un ou deux segments de droite sera d'autant meilleure que le rayon de courbure de la courbe théorique est plus grand.

4) Formules utilisées exactes ou approchées

4-1. — Détermination du coffrage

Pour la détermination du coffrage en fonction de la contrainte de compression du béton, l'équation (8) est directement utilisable car M y figure comme une fonction linéaire de β. On pourra donc aisément calculer la valeur de b_o, en fonction de M, b, h_o, h, telle que $k' = \dfrac{\sigma'_a}{\sigma_b}$ soit égal à $\dfrac{\overline{\sigma'_a}}{\overline{\sigma_b}}$.

Si on suppose que σ'_a est toujours égal à $\overline{\sigma'_a}$, et nous verrons que cela est facile à réaliser, il suffira de choisir b_o supérieur ou égal à la valeur calculée plus haut pour que σ_b soit inférieur à $\overline{\sigma_b}$. Comme on peut calculer de façon analogue les valeurs minima de b_o imposées par les contraintes maxima autorisées pour le cisaillement du béton, on a ainsi obtenu une détermination directe du coffrage.

La méthode qui consistait à se donner b_o, calculer le moment résistant de la section, vérifier qu'il est supérieur au moment appliqué, calculer A' et z (ou prendre ce dernier égal à 0,875 h), vérifier que le cisaillement dans la table est inférieur au maximum autorisé, conduisait en fait à des approximations successives.

L'équation (8) peut se mettre sous la forme :

$$(8) \qquad \frac{100\ M}{bh^2\ \sigma'_a} = \mu = \frac{(1 - \beta)\ \varepsilon\ (6\ \alpha - 3\ \varepsilon - 3\ \varepsilon\alpha + 2\ \varepsilon^2) + \beta\alpha^2\ (3 - \alpha)}{6\ (1 - \alpha)} \times \frac{100}{n}$$

ce qui peut s'écrire :

$$(9) \qquad \beta = f\mu - g$$

avec :

$$f = \frac{6\ (1 - \alpha)\ n}{\alpha^2\ (3 - \alpha) - \varepsilon\ (6\ \alpha - 3\ \varepsilon - 3\ \alpha\varepsilon + 2\ \varepsilon^2)} \times \frac{1}{100}$$

$$g = \frac{\varepsilon\ (6\ \alpha - 3\ \varepsilon - 3\ \alpha\varepsilon + 2\ \varepsilon^2)}{\alpha^2\ (3 - \alpha) - \varepsilon\ (6\ \alpha - 3\ \varepsilon - 3\ \alpha\varepsilon + 2\ \varepsilon^2)}$$

Cette méthode de calcul offre, outre l'avantage de la simplicité, la possibilité de vérifier très rapidement les hypothèses. Ainsi, le projeteur calcule $\mu = \dfrac{100\ M}{bh^2\ \sigma'_a}$ et peut savoir immédiatement si l'axe neutre tombe dans la table en comparant μ à la valeur μ_1 correspondant à $x = h_o$:

$$\mu_1 = \frac{\varepsilon^2\ (3 - \varepsilon)}{6\ (1 - \varepsilon)} \times \frac{100}{n}$$

Il peut savoir également si la valeur prise pour $k' = \dfrac{\sigma'_a}{\sigma_b}$ n'est pas trop faible en comparant μ à la valeur μ_2 correspondant à $\beta = 0$:

$$\mu_2 = \frac{100\ \varepsilon}{6\ n} \left[\frac{(6 - 6\ \varepsilon + 2\ \varepsilon^2)\ \alpha}{1 - \alpha} - \varepsilon\ (3 - 2\ \varepsilon) \right]$$

Ensuite, il calcule $\beta = f\mu - g$ et, si cette valeur est trop forte, il sait qu'il doit augmenter h_o (seulement si la valeur trouvée pour β est inférieure à 1) ou b ou h.

Pour le cisaillement du béton dans l'âme, les équations (3) et (4) nous donnent :

$$\frac{T}{bh\ \tau_b} = \theta_1 = \frac{\beta}{3} \times \frac{\varepsilon\ (6\ \alpha - 3\ \varepsilon - 3\ \alpha\varepsilon + 2\ \varepsilon^2) + \beta\ (\alpha - \varepsilon)^2\ (3 - \alpha - 2\ \varepsilon)}{\varepsilon\ (2\ \alpha - \varepsilon) + \beta\ (\alpha - \varepsilon)^2}$$

La courbe représentant la variation de θ_1 en fonction de β est une hyperbole passant par l'origine. Mais comme cette hyperbole n'a pas d'asymptote parallèle à l'axe des β, la fonction $\beta = \beta\ (\theta_1)$ est une fonction implicite se ramenant à la résolution d'une équation du second degré.

Mais, puisqu'on observe que d'une part l'intervalle de variation de β est $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et que d'autre part la sécurité se trouve du côté de la concavité de la courbe, nous avons remplacé cet arc d'hyperbole par les deux cordes joignant le point $\beta = 0{,}2$ aux points $\beta = 0$ et $\beta = 1$. Nous avons choisi le point $\beta = 0{,}2$ au lieu du point $\beta = 0{,}5$ que suggère l'arithmétique afin de diminuer l'erreur due à cette substitution pour les valeurs de β voisines de 0,10 et 0,15, qui sont les plus employées.

On a donc les formules simples :

$$(10\ a) \qquad Si\ \theta_1 \leqslant \theta_m \qquad \beta = r\ \theta_1$$

$$(10\ b) \qquad Si\ \theta_1 > \theta_m \qquad \beta = s\ \theta_1 - u$$

avec :

$$\theta_m = \frac{0{,}2}{3} \frac{3\ \alpha^2 - \alpha^3 + 24\ \alpha\varepsilon - 12\ \varepsilon^2 - 12\ \alpha\varepsilon^2 + 8\ \varepsilon^3}{\alpha^2 - 4\ \varepsilon^2 + 8\ \alpha\varepsilon}$$

$$r = 3\ \frac{\alpha^2 - 4\ \varepsilon^2 + 8\ \alpha\varepsilon}{3\ \alpha^2 - \alpha^3 + 24\ \alpha\varepsilon - 12\ \varepsilon^2 - 12\ \alpha\varepsilon^2 + 8\ \varepsilon^3}$$

$$s = 3\ \frac{\alpha^2 - 4\ \varepsilon^2 + 8\ \alpha\varepsilon}{3\ \alpha^2 - \alpha^3 + 24\ \alpha\varepsilon - 12\ \varepsilon^2 + 8\ \alpha\varepsilon^2 - 2\ \varepsilon^3 - 10\ \alpha^2\varepsilon}$$

$$u = \frac{2\ \varepsilon\ (\alpha - \varepsilon)^2}{3\ \alpha^2 - \alpha^3 + 24\ \alpha\varepsilon - 12\ \varepsilon^2 + 8\ \alpha\varepsilon^2 - 2\ \varepsilon^3 - 10\ \alpha^2\varepsilon}$$

On remarque que les équations (4) et (6) donnent :

$$\frac{A'_v}{b_o t} = \frac{\tau_b}{\sigma'_{av}}$$

Or, la condition du § 4,23412 des règles BA 60 est :

$$\frac{A'_v}{b_o t} < 0{,}02$$

d'où il résulte que :

$$\frac{\tau_b}{\sigma'_{av}} < 0{,}02$$

On a donc intérêt à choisir $\overline{\tau_b}$ tel que $\overline{\tau_b} < 0{,}02\,\overline{\sigma'_{av}}$

Pour le cisaillement du béton dans la table, les équations (1), (5) et (8) nous donnent :

$$\frac{T}{h^2\,\tau_b} = \theta_2 = \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(6\,\alpha - 3\,\varepsilon - 3\,\alpha\varepsilon + 2\,\varepsilon^2) + \beta\alpha^2\,(3-\alpha)}{3\,\alpha\,(1-\beta)}$$

La courbe représentative de la variation de θ_2 en fonction de β est une hyperbole équilatère. La fonction inverse s'explicite donc aisément :

$$(11)\quad \beta = \frac{3\,\alpha\,\theta_2 - \varepsilon\,(6\,\alpha - 3\,\varepsilon - 3\,\alpha\varepsilon + 2\,\varepsilon^2)}{3\,\alpha\,\theta_2 + \alpha^2\,(3-\alpha) - \varepsilon\,(6\,\alpha - 3\,\varepsilon - 3\,\alpha\varepsilon + 2\,\varepsilon^2)}$$

Ainsi, les équations (9), (10*a*), (10*b*) et (11) permettent de calculer, à partir des hypothèses faites sur b, h_o, h et k', trois valeurs minima de β, c'est-à-dire de b_o. La plus élevée de ces trois valeurs satisfera donc à toutes les conditions imposées.

4-2. — Détermination des armatures

Le calcul des armatures tendues d'une pièce de coffrage donné est un problème simple car la fonction $A' = A'(M)$ est donnée sous forme paramétrique en α par les équations (2) et (8). La méthode est donc toute tracée et la seule difficulté pratique est que cette fonction n'est pas explicitée.

Si on observe que :

a) Les courbes $A' = A'(M)$ pour les différentes valeurs des paramètres ε et β constituent une famille de cubiques;

b) Pour $\beta = 0$ ces cubiques se réduisent à des droites. Cette particularité bien connue a d'ailleurs permis la confection de nombreux formulaires des poutres en T à âme infiniment mince;

c) La sécurité se situe du côté de la concavité de la courbe. Ces considérations nous amènent à remplacer chaque courbe théorique par deux cordes. La deuxième observation nous indique que le rayon de courbure de la courbe théorique étant plus grand pour les faibles valeurs de β, cette substitution entraîne une très faible erreur.

On considère donc les cordes joignant le point $\alpha = 0{,}3 + 0{,}5\,\varepsilon$ aux deux points $\alpha = \varepsilon$ et $\alpha = 0{,}6$.

Si on appelle μ_1, μ_{mini} et μ_{max} les valeurs de μ correspondant respectivement à ces trois valeurs de α et si on pose :

$$\tilde{\omega}'_o = \frac{100\,A'}{bh}$$

on obtient les équations :

(12*a*) Si $\mu_{mini} < \mu < \mu_1$ $\quad \tilde{\omega}'_o = S - R\,(\mu - \mu_1)$

(12*b*) Si $\mu_1 < \mu < \mu_{max}$ $\quad \tilde{\omega}'_o = S + U\,(\mu_1 - \mu)$

avec :

$$\mu_{mini} = \frac{\varepsilon^2\,(3-\varepsilon)}{6\,(1-\varepsilon)} \times \frac{100}{n}$$

$$\mu_1 = \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(1{,}8 - 0{,}9\,\varepsilon + 0{,}5\,\varepsilon^2) + \beta\,(0{,}3 + 0{,}5\,\varepsilon)^2\,(2{,}7 - 0{,}5\,\varepsilon)}{6\,(0{,}7 - 0{,}5\,\varepsilon)} \times \frac{100}{n}$$

$$\mu_{max} = \left[(1-\beta)\,\varepsilon\,(1{,}5 - 2\,\varepsilon + \frac{5}{6}\,\varepsilon^2) + 0{,}36\,\beta\right] \times \frac{100}{n}$$

$$S = \frac{(1-\beta)\,0{,}6\,\varepsilon + \beta\,(0{,}3 + 0{,}5\,\varepsilon)^2}{2\,(0{,}7 - 0{,}5\,\varepsilon)} \times \frac{100}{n}$$

$$R = \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(3 - 1{,}5\,\varepsilon) + \ldots}{(1-\beta)\,\varepsilon\,(3 - 3\,\varepsilon + \varepsilon^2) + \ldots} \quad \frac{+\,\beta\,(0{,}45 + 1{,}8\,\varepsilon - 0{,}75\,\varepsilon^2)}{+\,\beta\,(0{,}405 + 1{,}545\,\varepsilon - 1{,}325\,\varepsilon^2 + 0{,}375\,\varepsilon^3)}$$

$$U = \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(3 - 1{,}5\,\varepsilon) + \beta\,(1{,}08 + 0{,}3\,\varepsilon)}{(1-\beta)\,\varepsilon\,(3 - 3\,\varepsilon + \varepsilon^2) + \beta\,(0{,}846 + 0{,}18\,\varepsilon - 0{,}05\,\varepsilon^2)}$$

On peut évidemment simplifier la présentation en écrivant :

$$(13)\qquad \tilde{\omega}'_o = D\mu - E$$

avec :

Si $\mu_{mini} < \mu < \mu_1$ $\quad D = R$ $\quad E = R\mu_1 - S$

Si $\mu_1 < \mu < \mu_{max}$ $\quad D = U$ $\quad E = U\mu_1 - S$

La même interpolation nous servira pour le calcul des armatures transversales. Puisque $\tilde{\omega}'_o$ est donné par excès par la formule (13), il en résultera que, si $\tilde{\omega}'_o$ est connu, cette même formule va donner μ par défaut :

$$\mu = \frac{\tilde{\omega}'_o + E}{D}$$

Comme, par définition :

$$z = \frac{M}{A'\,\sigma'_a} = \frac{\mu h}{\tilde{\omega}'_o}$$

la formule (13) nous donne z par défaut :

$$(13)\qquad z = \frac{(\tilde{\omega}'_o + E)\,h}{D\,\tilde{\omega}'_o}$$

Avec l'équation (6), il vient :

$$(14)\qquad \frac{A'_v}{t} = \frac{T}{\sigma'_{av}\,h} \times \frac{D\,\tilde{\omega}'_o}{\tilde{\omega}'_o + E}$$

par excès.

Nous avons ainsi calculé $\frac{A'_v}{t}$ par excès en utilisant une approximation par défaut de z. Cette approximation est généralement supérieure à la valeur 0,875 h admise par le para-

graphe 3-422 des règles BA 60. Mais il faut se méfier du fait que z est une fonction décroissante de $\tilde{\omega}'_o$ et bien prendre, pour le calcul des armatures transversales, une approximation par excès de la section A' réellement mise en œuvre.

4-3. — Vérification des contraintes

Pour les contraintes normales, il s'agit de calculer σ'_a et σ_b en fonction de M et A'.

La fonction $\dfrac{\sigma'_a}{M} = f(A')$ est donnée sous forme paramétrique en α par les équations (2) et (8). Mais nous observerons, d'une part, que la variation de la fonction $\dfrac{M}{\sigma'_a}$ a été étudiée au paragraphe précédent et que, d'autre part, cette dernière fonction se prête mieux que $\dfrac{\sigma'_a}{M}$ à une interpolation linéaire.

Nous conserverons donc l'équation approchée (13) qui s'écrit en posant :

$$m = \frac{M}{bh^2} \quad \text{et} \quad G = \frac{D}{\tilde{\omega}'_o + E}$$

$$\sigma'_a = 100\, mG \tag{13}$$

Comme D était calculé par excès et E par défaut, il en résulte que G et σ'_a sont calculés par excès. Comme maintenant la variable est $\tilde{\omega}'_o$, les deux intervalles d'application des formules approchées sont définis par les valeurs $\tilde{\omega}_{mini}$, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_{max}$ correspondant respectivement à μ_{mini}, μ_1, μ_{max} :

$$\tilde{\omega}_{mini} = \frac{\varepsilon^2}{2\,(1-\varepsilon)} \times \frac{100}{n}$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{(1-\beta)\,0{,}6\,\varepsilon + \beta\,(0{,}3 + 0{,}5\,\varepsilon)^2}{1{,}4 - \varepsilon} \times \frac{100}{n}$$

$$\tilde{\omega}_{max} = [(1-\beta)\,\varepsilon\,(1{,}5 - 1{,}25\,\varepsilon) + 0{,}45\,\beta] \times \frac{100}{n}$$

Pour calculer la contrainte de compression du béton, nous éliminerons σ'_a entre les équations (1) et (8), ce qui donne :

$$\frac{M}{\sigma_b} = \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(6\,\alpha - 3\,\varepsilon - 3\,\varepsilon\alpha + 2\,\varepsilon^2) + \beta\alpha^2\,(3-\alpha)}{6\,\alpha}\, bh^2 \tag{15}$$

La fonction $\dfrac{\sigma_b}{M} = f(A')$ est donc donnée sous forme paramétrique en α par les équations (2) et (15). Nous observerons que :

a) La fonction $\dfrac{M}{\sigma_b}$ de la variable α est plus facile à étudier que la fonction $\dfrac{\sigma_b}{M}$;

b) Les courbes $\dfrac{M}{\sigma_b} = g(A')$ pour les différentes valeurs des paramètres ε et β constituent une famille de quartiques;

c) La sécurité se situe du côté de la concavité de la courbe. Ces considérations nous amènent à remplacer chaque courbe $\dfrac{M}{\sigma_b} = g(A')$ par deux cordes, les cordes joignant le point $\alpha = 0{,}3 + 0{,}5\,\varepsilon$ aux deux points $\alpha = \varepsilon$ et $\alpha = 0{,}6$. On obtient les équations :

$$Si\ \tilde{\omega}_{mini} < \tilde{\omega}'_o < \tilde{\omega}_1 \qquad \frac{m}{\sigma_b} = a - c\,(\tilde{\omega}_1 - \tilde{\omega}'_o) \tag{16 a}$$

$$Si\ \tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}'_o < \tilde{\omega}_{max} \qquad \frac{m}{\sigma_b} = a + c'\,(\tilde{\omega}'_o - \tilde{\omega}_1) \tag{16 b}$$

avec :

$$a = \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(1{,}8 - 0{,}9\,\varepsilon + 0{,}5\,\varepsilon^2) + \beta\,(0{,}3 + 0{,}5\,\varepsilon)^2\,(2{,}7 - 0{,}5\,\varepsilon)}{1{,}8 + 3\,\varepsilon}$$

$$c = \frac{(1{,}4 - \varepsilon)\,(1-\varepsilon)}{3\,(1{,}8 + 3\,\varepsilon)} \times \frac{(1-\beta)\,\varepsilon\,(9 - 6\,\varepsilon) + \beta\,(2{,}43 + 2{,}7\,\varepsilon - 2{,}25\,\varepsilon^2)}{(1-\beta)\,\varepsilon\,(2-\varepsilon) + \beta\,(0{,}3 + 1{,}2\,\varepsilon - 0{,}5\,\varepsilon^2)} \times \frac{n}{100}$$

$$c' = \frac{1{,}4 - \varepsilon}{3\,(1{,}8 + 3\,\varepsilon)} \times \frac{(1-\beta)\,2{,}5\,\varepsilon\,(3 - 2\,\varepsilon) + 3\,\beta\,(0{,}315 + 0{,}45\,\varepsilon - 0{,}125\,\varepsilon^2)}{(1-\beta)\,1{,}25\,\varepsilon\,(2-\varepsilon) + \beta\,(0{,}9 + 0{,}25\,\varepsilon)} \times \frac{n}{100}$$

On peut simplifier la présentation en écrivant :

$$\sigma_b = mF \tag{17}$$

F étant donné par excès par les formules suivantes :

$$Si\ \tilde{\omega}_{mini} < \tilde{\omega}'_o < \tilde{\omega}_1 \qquad F = \frac{\dfrac{1}{c}}{\tilde{\omega}'_o + \left(\dfrac{a}{c} - \tilde{\omega}_1\right)}$$

$$Si\ \tilde{\omega}_1 < \tilde{\omega}'_o < \tilde{\omega}_{max} \qquad F = \frac{\dfrac{1}{c'}}{\tilde{\omega}'_o + \left(\dfrac{a}{c'} - \tilde{\omega}_1\right)}$$

Pour la contrainte de traction des étriers, l'équation (14) peut s'écrire :

$$\sigma'_{av} = \frac{Tl}{A'_v} \times \frac{G\,\tilde{\omega}'_o}{h} \tag{14}$$

G, et par conséquent σ'_{av}, étant calculés par excès. Pour la contrainte de cisaillement du béton dans l'âme, les équations (4) et (13) donnent :

$$\tau_b = \frac{T}{b_o} \times \frac{G\,\tilde{\omega}'_o}{h} \tag{18}$$

Enfin, pour la contrainte de cisaillement du béton dans la table, les équations (5) et (17) donnent :

$$\tau_b = T \times \frac{F}{bh^2} \times \frac{b - b_o}{2} \tag{19}$$

F, et par conséquent τ_b, étant calculés par excès.

4-4. — Armatures comprimées

4-41. — *Remarque liminaire*

Si on considère une section de coffrage connu, sans armatures comprimées, d'armatures tendues A', que l'on ajoute des aciers comprimés de section A et que :

— Soit on maintienne constante la section d'armatures tendues A';

— Soit on fasse varier A' de manière à garder constante la contrainte σ_a de ces aciers;
l'axe neutre s'éloigne des aciers tendus et le rapport $k' = \dfrac{\sigma'_a}{\sigma_b}$ augmente, sous réserve, toutefois, de certaines conditions concernant d, car il faut que les aciers comprimés ajoutés soient placés au-dessus du barycentre de la section comprimée.

En effet, dans la première des hypothèses, la dérivation de l'équation (2′) donne :

$$\frac{dx}{dA} = -\frac{n\,(x-d)^2}{nA'\,(h-d) + b_o x\left(\frac{x}{2} - d\right) + (b-b_o)\,h_o\left(\frac{h_o}{2} - d\right)}$$

Dans la deuxième hypothèse, l'élimination de A' entre les équations (2′) et (3′) donne :

$$(23)\quad \frac{b_o\,x^2}{2} + (b + b_1 - b_o)\,h_o\left(x - \frac{h_o}{2}\right) - n\,A'\,(h-x) = \frac{b_o\,x^2}{2} + (b-b_o)\,ho\left(x - \frac{h_o}{2}\right) + n\,A\,(x-d) - n\,A'\,(h-x)$$

$$(24)\quad (b+b_1)\frac{x^3}{3} - \frac{(b+b_1-b_o)\,(x-h_o)^3}{3} + n\,A'\,(h-x)^2 = b\,\frac{x^3}{3} - \frac{(b-b_o)\,(x-h_o)^3}{3} + n\,A\,(x-d)^2 + n\,A'\,(h-x)^2$$

qui peuvent s'écrire plus simplement :

$$(23)\quad b_1 = \frac{n\,A}{h_o} \times \frac{x-d}{x - \frac{h_o}{2}}$$

$$(24)\quad b_1 = \frac{n\,A}{h_o} \times \frac{(x-d)^2}{x^2 - h_o x + \frac{h_o^2}{3}}$$

Ces deux expressions sont incompatibles, mais nous avons cherché une des valeurs de b_1 qui soit approchée par défaut des deux valeurs ci-dessus.

$$(20)\quad A = \frac{(b-b_o)\,h_o\,[(3\,h_o - 6\,h)\,x + h_o\,(3\,h - 2\,h_o)] - b_o\,x^2\,(3\,h - x) + 6\,\dfrac{n\,M}{\sigma'_a}\,(h-x)}{6\,n\,(h-d)\,(x-d)}$$

et la dérivation de cette dernière équation donne :

$$\frac{dx}{dA} = -\frac{6\,n\,(h-d)\,(x-d)^2}{(b-b_o)\,h_o\,(3\,h_o h + 3\,h_o d - 2\,h_o^2 - 6\,dh) + b_o x\,(3\,xh + 3\,xd - 2\,x^2 - 6\,dh) + 6\,\dfrac{n\,M}{\sigma'_a}\,(h-d)}$$

Ces deux dérivées peuvent changer de signe pour des valeurs élevées de d, mais elles sont négatives lorsque :

$$(21)\quad 2\,d\left(1 + \frac{d}{h}\right) < h_o \leqslant x < h$$

$$(22)\quad 5\,d < h$$

Sous ces réserves, on connaît donc une valeur approchée par excès de x dans toute section en T avec armatures comprimées, c'est la valeur de x pour la même section sans armatures comprimées, que cette transformation s'effectue avec A' constant ou avec σ'_a constant.

4-42. — *Calcul des sections avec armatures comprimées*

La prise en compte des aciers comprimés dans le calcul des poutres en T introduit deux paramètres supplémentaires A et d dans un calcul qui comprend déjà un grand nombre de paramètres. Aussi avons-nous essayé de simplifier ce problème en remplaçant les aciers comprimés par une surlargeur fictive b_1 de la table de compression. De cette manière, la prise en compte des aciers comprimés se traduit seulement par la modification d'un paramètre existant b qui devient $b + b_1$.

Pour que cette surlargeur fictive soit équivalente à la section A d'aciers comprimés, il faudrait qu'elle satisfasse à la fois aux deux expressions suivantes :

Pour cela, nous avons étudié les deux courbes de variation de b_1 en fonction de $\alpha = x/h$ et nous avons fait les observations suivantes :

a) Ces deux fonctions sont décroissantes pour :

$$\alpha > \frac{\varepsilon\,(2\,\varepsilon - 3\,\delta)}{3\,(\varepsilon - 2\,\delta)} \qquad \text{avec } \delta = \frac{d}{h} \qquad \varepsilon = \frac{h_o}{h}$$

b) Ces deux fonctions ont même valeur pour :

$$\alpha = \frac{\varepsilon\,(2\,\varepsilon - 3\,\delta)}{3\,(\varepsilon - 2\,\delta)}$$

et pour α supérieur à cette valeur, l'équation (23) donne une valeur de b_1 inférieure à celle donnée par l'équation (24).

c) La valeur $\alpha = \dfrac{1+\delta}{2}$ (limite supérieure de l'intervalle utile de la variation de α) est supérieure à :

$$\alpha = \frac{\varepsilon\,(2\,\varepsilon - 3\,\delta)}{3\,(\varepsilon - 2\,\delta)}$$

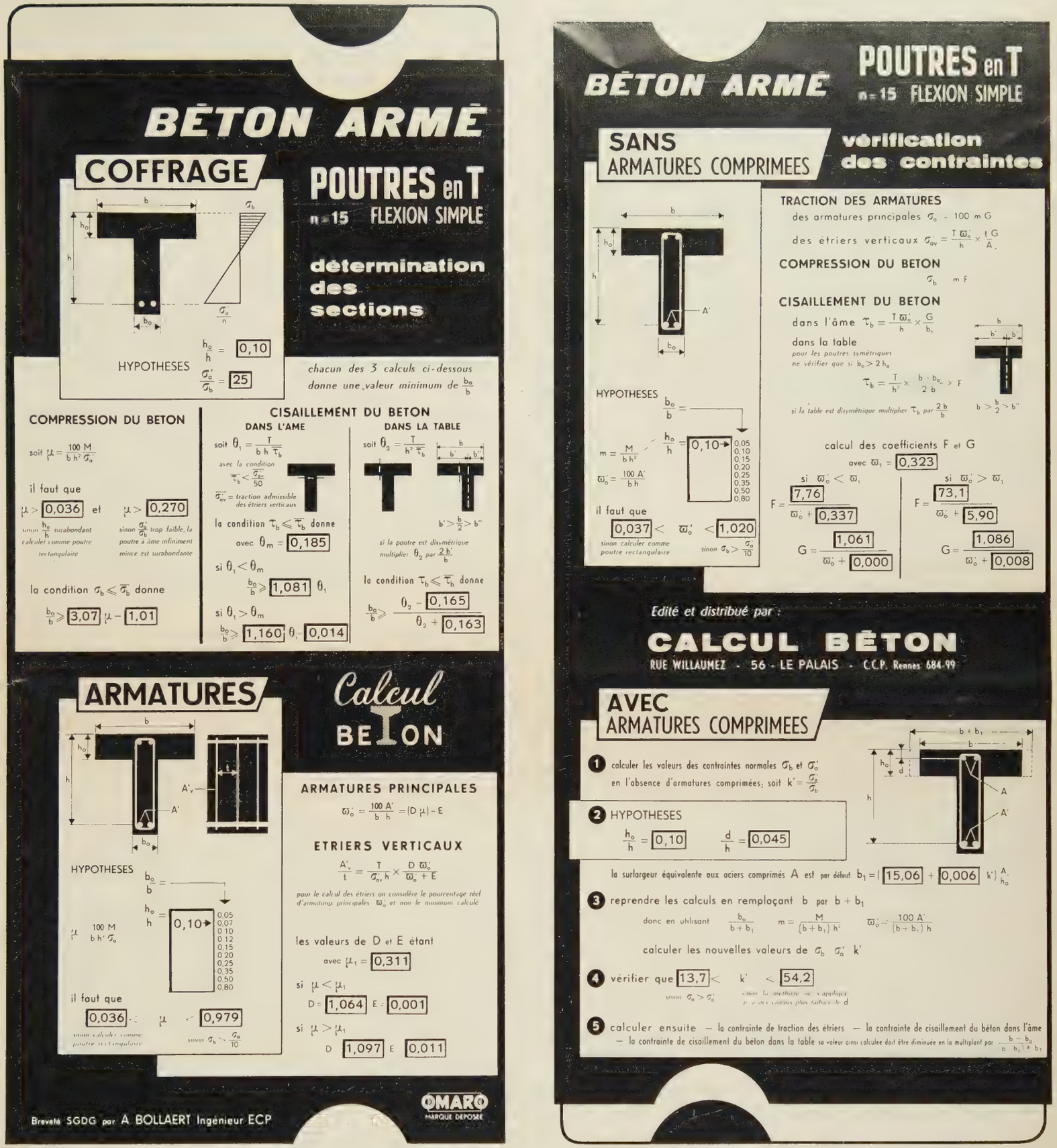

Fig. 1. — Règles pour le calcul de la poutre en T à partir des données de la présente étude.

si δ satisfait à la condition :

$$4\ \varepsilon^2 - 9\ \varepsilon\delta + 6\ \delta^2 - 3\ \varepsilon + 6\ \delta < 0 \qquad (25)$$

d) La valeur $\alpha = \varepsilon$ (limite inférieure de l'intervalle utile de la variation de α) est supérieure à :

$$\alpha = \frac{\varepsilon\ (2\ \varepsilon - 3\ \delta)}{3\ (\varepsilon - 2\ \delta)}$$

si $\delta < \varepsilon/3$.

Par conséquent, nous ne considérerons désormais que des

valeurs de d satisfaisant à la condition (25) et nous réduirons l'intervalle utile de la variation de α à :

$$Si\ \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad \varepsilon - \alpha < \frac{1+\delta}{2}$$

$$Si\ \delta > \frac{\varepsilon}{3} \qquad \frac{\varepsilon(2\varepsilon - 3\delta)}{3(\varepsilon - 2\delta)} < \alpha < \frac{1+\delta}{2}$$

Sous cette hypothèse et dans cet intervalle, l'équation (23) nous donne une valeur approchée par défaut de b_1. Si, au moyen de l'équation (1), on prend comme nouvelle variable k', l'équation (23) devient :

$$(26) \qquad b_1 = \frac{n\,A}{\varepsilon\,h} \times \frac{2\,\delta\,k' - 2(1-\delta)\,n}{\varepsilon\,k' - 2(1-\varepsilon)\,n}$$

L'étude de cette fonction $b_1 = f(k')$ nous montre que c'est une fonction croissante et que la courbe représentative est une hyperbole équilatère.

Les limites de l'intervalle utile de variation de k' sont :

$$(27) \qquad k'_{mini} = n\,\frac{1-\delta}{1+\delta}$$

$$(28\,a) \qquad Si\ \delta > \frac{\varepsilon}{3} \qquad k'_{max} = n\,\frac{3\varepsilon - 6\delta - 2\varepsilon^2 + 3\delta\varepsilon}{2\varepsilon^2 - 3\delta\varepsilon}$$

$$(28\,b) \qquad Si\ \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \qquad k'_{max} = n\,\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

Comme nous cherchons une valeur approchée par défaut de b_1, une expression plus simple peut être obtenue par l'équation d'une tangente à cette hyperbole en un point de l'arc correspondant à l'intervalle utile de variation de k' :

$$(29) \qquad b_1 = (C_1 + C_2\,k')\,\frac{A}{h_o}$$

Pour $\delta \leqslant \varepsilon/3$ nous avons choisi la tangente au point :

$$k' = n\,\frac{3 - 2\varepsilon - \delta}{1 + 2\varepsilon + \delta}$$

d'où les coefficients :

$$C_1 = n\,\frac{2 + \varepsilon + 2\delta - 4\varepsilon^2 + 10\,\delta\varepsilon - 2\delta^2 + 4\varepsilon^3 - 4\,\delta\varepsilon^2 - 7\,\delta^2\varepsilon - 2\delta^3}{2(1+\delta)^2}$$

$$C_2 = \frac{(\varepsilon - 2\delta)(1 + 2\varepsilon + \delta)^2}{2(1+\delta)^2}$$

Pour $\delta > \varepsilon/3$ nous avons choisi la tangente au point :

$$k' = n\,\frac{9\varepsilon - 18\delta - 4\varepsilon^2 + 3\,\delta\varepsilon + 6\delta^2}{3\varepsilon - 6\delta + 4\varepsilon^2 - 3\,\delta\varepsilon - 6\delta^2}$$

d'où les coefficients :

$$C_1 = n\,\frac{18\varepsilon^2 - 72\,\delta\varepsilon + 72\,\delta^2 - 15\varepsilon^3 + 102\,\delta\varepsilon^2 - 180\,\delta^2\varepsilon + \ldots}{\ldots + 72\,\delta^3 - 40\varepsilon^4 + 246\,\delta\varepsilon^3 - 522\,\varepsilon^2\delta^2 + 432\,\varepsilon\delta^3 - 72\,\delta^4 + \ldots}$$

$$\frac{}{\ldots + 16\varepsilon^5 - 56\,\varepsilon^4\delta + 9\,\varepsilon^3\delta^2 + 114\,\varepsilon^2\delta^3 - 36\,\varepsilon\delta^4 - 72\,\delta^5}{2(3\varepsilon - 6\delta - 2\varepsilon^2 + 9\,\delta\varepsilon - 6\delta^2)^2}$$

$$C_2 = \frac{(\varepsilon - 2\delta)(3\varepsilon - 6\delta + 4\varepsilon^2 - 3\,\delta\varepsilon - 6\delta^2)^2}{2(3\varepsilon - 6\delta - 2\varepsilon^2 + 9\,\delta\varepsilon - 6\delta^2)^2}$$

En conclusion, les armatures comprimées qui peuvent être prises en compte dans le calcul de la poutre en T (les armatures dont les ligatures satisfont aux prescriptions des articles 17-2 et 29 de la circulaire n° 70 du 14-11-1964) sont équivalentes à une surlargeur b_1 de la table de compression au moins égale à la valeur donnée par l'équation (29) sous réserve que la distance d satisfasse aux conditions (21), (22) et (25). La valeur de k' à introduire dans la formule sera :

— Pour un calcul de détermination des sections, la valeur correspondant à une poutre ayant même coffrage, soumise au même moment M et dont les armatures sont soumises à la même contrainte σ'_a;

— Pour un calcul de vérification des contraintes, la valeur correspondant à une poutre ayant même coffrage, mêmes armatures tendues A' et soumise au même moment M.

Le tout, sous réserve que la nouvelle valeur de k', obtenue après introduction des aciers comprimés dans le calcul, soit comprise dans l'intervalle défini par les inégalités (27), (28a), (28b).

La formule (29) pourra également être utilisée inversement pour calculer une section d'aciers comprimés équivalente à la portion de la table de compression supprimée par une trémie. La valeur de k' à introduire dans la formule sera la valeur correspondant à la poutre soumise aux mêmes efforts et ne comportant pas de trémie.

5) Utilisation des formules précédentes

Si on résume les problèmes traités, on a le tableau I.

Tableau I

Problème	Inconnue	Variables	Paramètres	Formules
Détermination du coffrage :				
— en raison de $\overline{\sigma_b}$	$\frac{b_o}{b}$	$\frac{100\,M}{bh^2\,\overline{\sigma'_a}}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{\sigma'_a}{\sigma_b}$	(9)
— en raison de $\overline{\tau_b}$ dans l'âme	$\frac{b_o}{b}$	$\frac{T}{bh\,\overline{l_b}}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{\sigma'_a}{\sigma_b}$	(10a) (10b)
— en raison de $\overline{\tau_b}$ dans la table	$\frac{b_o}{b}$	$\frac{T}{h^2\,\overline{l_b}}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{\sigma'_a}{\sigma_b}$	(11)
Détermination des armatures :				
— principales	$\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{100\,M}{bh^2\,\overline{\sigma'_a}}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(13)
— transversales	$\frac{A'_v}{t}$	$\frac{T}{\overline{\sigma'_{av}}h}$ $\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(14)
Vérification des contraintes :				
— des armatures principales	σ'_a	$\frac{M}{bh^2}$ $\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(13)
de la compression du béton	σ_b	$\frac{M}{bh^2}$ $\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(17)
des armatures transversales	σ'_{av}	$\frac{Tt}{A'_v h}$ $\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(14)
— du cisaillement du béton dans l'âme	τ_b dans l'âme	$\frac{T}{b_o h}$ $\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(18)
du cisaillement du béton dans la table	τ_b dans la table	$\frac{T(b-b_o)}{2\,bh^2}$ $\frac{100\,A'}{bh}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{b_o}{b}$	(19)
Armatures comprimées :				
recherche de la surlargeur équivalente	b_1	$\frac{A}{h_o}$ $\frac{\sigma'_a}{\sigma_b}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{d}{h}$	(29)
— diminution de la largeur de la table (problème de la trémie)	$\frac{A}{h_o}$	b_1 $\frac{\sigma'_a}{\sigma_b}$	$\frac{h_o}{h}$ $\frac{d}{h}$	(29)

On voit qu'il a été possible de donner à des formules d'origines très diverses une structure assez uniforme, chaque équation exprimant la valeur de l'inconnue en fonction d'une ou deux variables et de deux paramètres. Toutes les équations d'un même groupe utilisent le même couple de paramètres.

Et même, pour la détermination du coffrage, les trois équations de ce groupe ont la même inconnue, ce qui permet de déterminer du premier coup une valeur de b_o/b égale ou supérieure aux trois valeurs calculées.

Il en résulte que ces équations se prêtent volontiers à une présentation synoptique, les différentes équations d'un groupe étant présentées parallèlement.

Par ailleurs, chaque équation exprime la valeur de l'inconnue en fonction de la ou des variables suivant une formule très simple et en fonction des deux paramètres suivant des lois aussi compliquées qu'il est nécessaire. Ainsi, la conclusion logique de cette étude se concrétise par un tableau synoptique portant des formules simples et par une série de tableaux à double entrée, les tableaux correspondant aux équations d'un même groupe ayant les mêmes valeurs d'entrée.

Il ne reste plus qu'un choix à faire, c'est celui des valeurs des paramètres à inscrire sur les entrées des tableaux. On songe d'abord à faire varier les paramètres dans le plus grand domaine possible, puis on craint que, le nombre des cases du tableau étant matériellement limité, l'écart d'une case à sa voisine soit si grand qu'il entraîne une erreur non négligeable. Mais, en fait, ces deux idées ne sont pas antagonistes, il suffit de renoncer à une distribution arithmétique des valeurs des paramètres.

Nous avons donc, pour les quatre groupes de tableaux, choisi un domaine aussi large que possible :

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}05 \leqslant \dfrac{h_o}{h} \leqslant 0{,}5 \\[2ex] 0{,}05 \leqslant \dfrac{b_o}{b} < 1 \\[2ex] \dfrac{2\,n}{3} < \dfrac{\sigma'_a}{\sigma_b} < n\,\dfrac{h-h_o}{h_o} \\[2ex] \dfrac{h_o}{10} \leqslant d < \dfrac{h_o}{2\left(1+\dfrac{d}{h}\right)} \end{array}\right.$$

Puis, pour chaque groupe, nous avons choisi arbitrairement 400 à 500 couples de valeurs des paramètres, nous avons calculé les différentes erreurs commises pour chaque couple et nous avons ensuite éliminé les quatre cinquièmes de ces couples suivant certains critères, dont celui de garder une erreur relative constante lorsqu'on passe d'une case à la suivante.

A titre d'exemple, les tableaux II et III donnent les erreurs relatives en pour-cent dans le calcul de $\tilde{\omega}'_o = D\mu - E$ par la formule (13) pour les valeurs $\alpha = 0{,}15 + 0{,}75\,\varepsilon$ et $\alpha = 0{,}45 + 0{,}25\,\varepsilon$.

On a indiqué :

— L'« erreur systématique » entraînée par la substitution de la formule (13) aux équations théoriques (2) et (8);

— L'« erreur due au paramètre b_o/b » produite par le remplacement, dans la formule (13), de la valeur indiquée du paramètre b_o/b par la valeur immédiatement supérieure. Ainsi, pour une poutre de section $b_o/b = 0{,}069$; on doit, pour être du côté de la sécurité, prendre les coefficients correspondant à la valeur 0,05 et non à la valeur 0,07. On a donc indiqué pour la valeur 0,05 l'erreur commise en utilisant les coefficients correspondant à cette valeur pour calculer une poutre de dimensions $b_o/b = 0{,}07$;

— L'« erreur due au paramètre h_o/h » produite par le remplacement, dans la formule (13), de la valeur indiquée du paramètre h_o/h par la valeur immédiatement supérieure;

— L'« erreur totale » qui est la somme des trois erreurs précédentes.

Tableau II. — Erreurs relatives en % dans le calcul de $\tilde{\omega}'_o = D\mu - E$ pour $\alpha = 0{,}15 + 0{,}75\,\varepsilon$

h_o/h ↓ \ b_o/b →	0,05	0,07	0,10	0,12	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50	0,80
0,05	0,85 0,43 0,18 1,46	1,14 0,58 0,11 1,83	1,51 0,35 0,03 1,89	1,74 0,48 0,02 2,24	2,04 0,69 0,07 2,80	2,46 0,59 0,13 3,18	2,81 0,95 0,17 3,93	3,34 1,04 0,20 4,58	3,88 1,31 0,19 5,38	4,47 0,57 0,09 5,13
0,06	0,70 0,37 0,23 1,30	0,95 0,51 0,17 1,63	1,28 0,31 0,10 1,69	1,48 0,43 0,06 1,97	1,75 0,64 0,01 2,40	2,14 0,56 0,05 2,75	2,48 0,92 0,09 2,49	3,00 1,04 0,14 4,18	3,56 1,38 0,15 5,09	4,22 0,62 0,08 4,92
0,07	0,60 0,32 0,26 1,18	0,81 0,45 0,21 1,47	1,10 0,28 0,15 1,53	1,27 0,39 0,11 1,77	1,52 0,59 0,07 2,18	1,88 0,52 0,01 2,41	2,20 0,88 0,03 3,11	2,71 1,03 0,09 3,83	3,27 1,41 0,11 4,79	3,97 0,66 0,08 4,71
0,08	0,51 0,28 0,55 1,34	0,69 0,40 0,48 1,57	0,95 0,25 0,38 1,58	1,11 0,35 0,32 1,78	1,33 0,54 0,25 2,12	1,67 0,48 0,14 2,29	1,96 0,84 0,06 2,86	2,45 1,00 0,05 3,50	3,01 1,42 0,14 4,57	3,73 0,68 0,15 4,56
0,10	0,39 0,22 0,57 1,18	0,53 0,32 0,52 1,37	0,74 0,20 0,44 1,38	0,87 0,29 0,39 1,55	1,05 0,46 0,33 1,84	1,33 0,42 0,24 1,99	1,58 0,75 0,16 2,49	2,02 0,93 0,04 2,99	2,55 1,39 0,06 4,00	3,29 0,70 0,14 4,13
0,12	0,31 0,18 0,84 1,33	0,42 0,26 0,78 1,46	0,59 0,17 0,69 1,45	0,69 0,25 0,64 1,58	0,84 0,39 0,56 1,79	1,08 0,36 0,45 1,89	1,30 0,66 0,36 2,32	1,69 0,85 0,18 2,72	2,17 1,35 0,02 3,54	2,89 0,70 0,17 3,76
0,15	0,22 0,14 1,31 1,67	0,31 0,20 1,24 1,75	0,43 0,13 1,13 1,69	0,51 0,19 1,08 1,78	0,63 0,31 0,98 1,92	0,81 0,29 0,84 1,94	0,98 0,54 0,69 2,21	1,30 0,72 0,46 2,48	1,71 1,20 0,16 3,07	2,37 0,66 0,22 3,25
0,20	0,14 0,09 1,15 1,38	0,19 0,13 1,11 1,43	0,27 0,09 1,04 1,40	0,32 0,13 0,99 1,44	0,40 0,21 0,92 1,53	0,52 0,20 0,81 1,53	0,64 0,39 0,70 1,73	0,86 0,54 0,50 1,90	1,16 0,95 0,25 2,36	1,68 0,55 0,15 2,38
0,25	0,09 0,06 1,43 1,58	0,12 0,09 1,36 1,57	0,17 0,06 1,26 1,49	0,21 0,09 1,19 1,49	0,26 0,14 1,10 1,50	0,34 0,14 0,94 1,42	0,42 0,27 0,79 1,48	0,57 0,39 0,49 1,45	0,79 0,72 0,09 1,60	1,17 0,43 0,64 2,24
0,35	0,03 0,03 0,90 0,96	0,05 0,04 0,85 0,94	0,07 0,03 0,78 0,88	0,08 0,04 0,73 0,85	0,10 0,06 0,67 0,83	0,14 0,06 0,54 0,74	0,17 0,12 0,44 0,73	0,24 0,18 0,23 0,65	0,33 0,36 0,14 0,83	0,51 0,22 0,74 1,47
0,50	0 0 0	0,01 0,01 0,02	0,01 0 0,01	0,01 0,01 0,02	0,01 0,01 0,02	0,02 0,01 0,03	0,02 0,02 0,04	0,03 0,03 0,06	0,04 0,06 0,10	0,07 0,03 0,10

a	b
c	d

a) Erreur systématique;
b) Erreur due au paramètre b_o/b;
c) Erreur due au paramètre h_o/h;
d) Erreur totale.

Tableau III. — Erreurs relatives en % dans le calcul de $\tilde{\omega}'_o = D\mu - E$ pour $\alpha = 0{,}45 + 0{,}25\,\varepsilon$

h_o/h ↓ \ b_o/b →	0,05	0,07	0,10	0,12	0,15	0,20	0,25	0,35	0,50	0,80
0,05	0,75 0,94 0,37 2,06	0,97 1,13 0,56 2,66	1,23 0,62 0,74 2,59	1,37 0,77 0,81 2,95	1,55 0,96 0,88 3,39	1,78 0,69 0,91 3,38	1,96 0,88 0,89 3,73	2,20 0,61 0,79 3,60	2,43 0,26 0,59 3,28	2,67 0,16 0,25 3,08
0,06	0,63 0,85 0,17 1,65	0,82 1,07 0,32 2,21	1,06 0,61 0,49 2,16	1,20 0,77 0,56 2,53	1,37 1,00 0,64 3,01	1,60 0,76 0,70 3,06	1,78 1,03 0,71 3,52	2,04 0,84 0,66 3,54	2,28 0,60 0,51 3,39	2,55 0 0,23 2,78
0,07	0,54 0,78 0,03 1,35	0,71 1,00 0,16 1,87	0,93 0,58 0,31 1,82	1,06 0,75 0,38 2,19	1,22 1,01 0,46 2,69	1,45 0,79 0,53 2,77	1,62 1,14 0,56 3,32	1,89 1,00 0,55 3,44	2,15 0,89 0,45 3,49	2,43 0,15 0,22 2,80
0,08	0,47 0,71 0,21 1,39	0,62 0,93 0,09 1,64	0,82 0,55 0,26 1,63	0,94 0,73 0,38 2,05	1,10 1,00 0,53 2,63	1,31 0,81 0,69 2,81	1,49 1,21 0,78 3,48	1,75 1,14 0,82 3,71	2,02 1,12 0,73 3,87	2,32 0,28 0,38 2,98
0,10	0,37 0,59 0,42 1,38	0,49 0,80 0,25 1,54	0,66 0,49 0,06 1,21	0,76 0,66 0,07 1,49	0,89 0,95 0,19 2,03	1,09 0,80 0,34 2,23	1,25 1,26 0,45 2,96	1,51 1,30 0,54 3,35	1,78 1,48 0,54 3,80	2,11 0,50 0,33 2,94
0,12	0,29 0,50 0,84 1,63	0,39 0,70 0,66 1,75	0,53 0,43 0,44 1,40	0,62 0,60 0,30 1,52	0,74 0,88 0,14 1,76	0,91 0,77 0,13 1,81	1,06 1,26 0,25 2,57	1,30 1,38 0,43 3,11	1,57 1,62 0,52 3,71	1,92 0,59 0,39 2,90
0,15	0,21 0,40 1,64 2,25	0,29 0,57 1,45 2,31	0,40 0,36 1,19 1,95	0,47 0,50 1,04 2,01	0,56 0,77 0,83 2,16	0,70 0,69 0,52 1,91	0,83 1,18 0,27 2,28	1,05 1,40 0,17 2,62	1,30 1,92 0,36 3,58	1,65 0,85 0,45 2,95
0,20	0,13 0,28 1,75 2,16	0,18 0,41 1,61 2,20	0,26 0,26 1,44 1,96	0,30 0,38 1,33 2,01	0,37 0,59 1,18 2,14	0,47 0,55 0,95 1,97	0,56 0,99 0,74 2,29	0,73 1,27 0,42 2,42	0,94 1,94 0,10 2,98	1,25 0,97 0,25 2,47
0,25	0,09 0,20 3,22 3,51	0,12 0,29 3,07 3,48	0,17 0,19 2,84 3,20	0,20 0,28 2,70 3,18	0,24 0,44 2,51 3,19	0,31 0,42 2,19 2,92	0,38 0,79 1,90 3,07	0,50 1,06 1,39 2,95	0,67 1,76 0,75 3,18	0,93 0,95 0,14 2,02
0,35	0,03 0,09 3,39 3,51	0,05 0,14 3,29 3,48	0,07 0,09 3,13 3,29	0,08 0,14 3,03 3,25	0,10 0,22 2,88 3,20	0,13 0,22 2,64 2,99	0,16 0,42 2,40 2,98	0,22 0,61 1,95 2,78	0,30 1,11 1,31 2,72	0,45 0,67 0,18 1,30
0,50	0 0,02 0,02	0,01 0,02 0,03	0,01 0,02 0,03	0,01 0,02 0,03	0,01 0,04 0,05	0,02 0,04 0,06	0,02 0,08 0,10	0,03 0,11 0,14	0,04 0,23 0,27	0,07 0,14 0,21

a	b
c	d

a) Erreur systématique;
b) Erreur due au paramètre b_o/b;
c) Erreur due au paramètre h_o/h;
d) Erreur totale.

On voit que dans le domaine :

$$\left|\begin{array}{l} 0{,}05 \leqslant h_o/h \leqslant 0{,}25 \\ 0{,}05 \leqslant b_o/b \leqslant 0{,}25 \end{array}\right.$$

la somme des erreurs est inférieure à 3,4 % et qu'à l'extérieur de ce domaine, elle est inférieure à 5,4 %.

6) Conclusion

Il est ainsi possible, à partir de cette étude, de confectionner un instrument de calcul qui permette au projeteur de béton armé de traiter avec rapidité, précision et sécurité tous les problèmes concernant la poutre en T.

A. BOLLAERT

ERRATA

Page 4 *(colonne de gauche, en bas de page)* l'équation (2) doit se lire :

$$A' = \frac{(1-\beta)\ \varepsilon\ (2\alpha-\varepsilon) + \beta\alpha^2}{2\ (1-\alpha)} \times \frac{b\ h}{n}$$

Page 6 *(colonne de gauche, en bas de page)* les équations (12 *a*) et (12 *b*) doivent se lire :

$$(12a) \qquad \text{Si } \mu_{mini} < \mu < \mu_1 \qquad \omega'_o = S - R\ (\mu_1 - \mu)$$

$$(12b) \qquad \text{Si } \mu_1 < \mu < \mu_{max} \qquad \omega'_o = S + U\ (\mu - \mu_1)$$

Page 7 *(colonne de droite)* le coefficient c' de l'équation (16 *b*) doit se lire :

$$c' = \frac{1{,}4 - \varepsilon}{3\ (1{,}8 + 3\ \varepsilon)} \times \frac{(1-\beta)\ 2{,}5\ \varepsilon^2\ (3 - 2\ \varepsilon) + 3\ \beta\ (0{,}315 + 0{,}45\ \varepsilon - 0{,}125\ \varepsilon^2)}{(1-\beta)\ 1{,}25\ \varepsilon\ (2-\varepsilon) + \beta\ (0{,}9 + 0{,}25\ \varepsilon)} \times \frac{n}{100}$$

Page 8 *(colonne de gauche)* les sept premières lignes du texte du paragraphe 4-41 doivent se lire :

Si on considère une section de coffrage connu, sans armatures comprimées, d'armatures tendues A', soumise à un moment de flexion constant M , que l'on ajoute des aciers comprimés de section A et que :

— soit on maintienne constante la section d'armatures tendues A' ;
— soit on fasse varier A' de manière à garder constante la contrainte σ'_a de ces aciers.